

Introducere în teoria haosului

Analiza dinamicii neliniare, și mai ales aplicații ale acesteia la diferitele sisteme fizice, începe să prindă contur după anii 1980, în special datorită dezvoltării puterii de calcul numeric a calculatoarelor electronice care permite rezolvarea particulară a majorității ecuațiilor dinamice a sistemelor fizice, permițând observarea unor structuri comportamentale greu, dacă nu imposibil de predicționat prin metode analitice clasice. Una dintre manifestările dinamici neliniare care a atras în mod deosebit atenția este comportarea haotică deterministă [1-2].

Cuvântul uzual „haos” se referă la dezordine și confuzie extremă, dar în știință prin el se denuște „dezordine deterministă”. Un sistem haotic este în principiu perfect determinist – dar dependența sensibilă de condițiile inițiale duce la erori enorme în predicție, care devine echivalentă cu predicția statistică, probabilistică. Important este însă de a separa inadecvarea modelului (erori structurale sau parametrice) de efectele incertitudinii observaționale. Printr-un sistem haotic înțelegem un sistem dinamic determinist, neliniar, pentru care predicțiile evoluției sistemului nu pot fi mai precise decât pentru cazul unei manifestări ne-deterministe, stohastice. Chiar dacă traiectoria poate fi calculată principial cu precizie, datorită cunoașterii legii dinamice formale care guvernează dinamica sistemului, imprecizia determinării condițiilor inițiale duce la traiectorii complet diferite, chiar dacă condițiile inițiale sunt infinitezimal apropiate. În mod general orice sistem dinamic neliniar cu mai mult de trei grade de libertate poate manifesta comportare haotică (deterministă), în anumite condiții specificate de parametrii de control ai sistemului. Astfel serii temporale ne-predictibile se pot obține și pentru sisteme deterministe neliniare [3-4]. În acest fel echivalența nepredictibil - proces stohastic dispare și putem lua în considerație posibilitatea ca evoluția temporală a variabilelor unui sistem să poată fi datorată, parțial sau în totalitate, unei dinamici neliniare deterministe, cu un număr limitat de variabile și nu în totalitate unei dinamici stohastice.

Există o întreagă ierarhie de clase de manifestare dinamică precum [1]: periodic predictibilă (planetele, ceasul); periodic nepredictibilă (aruncarea monedei); haos tranzient (jocul pinball); haos intermitent (harta logistică); haos de bandă redusă

(atractorul Rössler); haos de bandă largă de dimensiune mică (atractorul Lorentz); haos de bandă largă de dimensiune mare (rețelele neuronale); zgomot colorat (corelat – drumuri aleatoare); generatoare pseudo-aleatoare (generarea digitală a numerelor aleatoare); zgomot aleator (radioactivitatea – probabil cea mai clar exemplu de fenomen pur aleator, guvernat de mecanica cuantică – teorie inerent probabilistică). Majoritatea sistemelor prezintă însă o combinație a acestor clase.

Chiar și ecuații simple pot avea soluții și evoluții temporale complicate (dependența de condițiile inițiale, atractori stranii, structură fractală, etc.), invers având numai observațiile asupra evoluției unui sistem cu manifestare complicată se caută o soluție simplă, directă. Analiza datelor obținute de la sistemele haotice este mai puțin avansată din punct de vedere teoretic decât teoria generală a sistemelor haotice. Analiza seriilor temporale, în cazul proiectului nostru a variației intensității emisiei radiației laser, are în vedere o serie de mărimi printre care: analiza gradului de determinism a datelor experimentale; predicția - estimarea valorilor viitoare a sistemelor dinamice; reducerea și scoaterea din zgomot; înțelegerea dinamicii ascunse a sistemelor și controlul evoluției sistemelor dinamice. Trebuie ținut întotdeauna seama de limitările practice ce țin de: măsurarea - limitarea acurateții prin conversie analog-digitală, zgomotul introdus prin măsurare, necunoașterea frecvenței optime de eșantionare; modelarea - necunoașterea variabilelor fundamentale și a numărului lor, accesul indirect la ele; și procesarea (simularea) – aproximarea introdusă de metodele numerice pentru informațiile pe care le avem despre sisteme.

Foarte important de accentuat este deosebirea esențială între o manifestare haotic deterministă și una pur stohastică, chiar dacă amândouă, în desfășurarea lor neperturbată, nu pot fi predicționate decât la nivel probabilistic, o manifestare determinist haotică poate fi controlată, se poate chiar trece dintr-o dinamică haotică într-o dinamică periodică sau cvasi-periodică, pe când manifestările stohastice sunt ne-controlabile. Acest fapt stă de altfel și la baza aplicațiilor pe care teoria dinamicii haotice o are la controlul și condiționarea interacției sistemelor cu comportare haotică.

Comportările generale pe care trebuie să le aibă un sistem pentru a-l numi haotic sunt:

- dependența de micile perturbații – micile perturbații duc la modificări majore ale

traectoriei deterministe, previziunile pe termen lung fiind de natură cvasi-probabilistică;

- complexitate comportamentală inerentă – sistemele deterministe simple pot manifesta comportări complexe, haotice;

- ordine inerentă – comportamentul pe termen scurt este predictibil, datorită determinismului sistemului;

- instabilitate inerentă – într-un sistem haotic o nouă stare de echilibru apare doar dacă instabilitatea a fost parcursă în întregime;

- stări departe de echilibru – un sistem haotic ajunge într-o stare departe de echilibru prin instabilitate;

- alegere întâmplătoare – trecerea de la haos la ordine în punctele de criticalitate se face impredictibil;

- auto-organizare – elementele sistemului haotic cooperează în punctele de criticalitate, organizându-se într-o nouă structură;

- disipație – o stare de ordine atinsă de un sistem haotic nu este decât începutul unei noi tranziții către haos.

Toate sistemele haotice au două trăsături în comun. Ele sunt neliniare și implica anumite reguli iterative. Analiza numerică este de obicei singura posibilitate de analiză a unor astfel de sisteme. În funcție de valoarea inițială a parametrului de control, sistemul poate evolua spre orbite stabile, constante sau periodice, sau spre orbite ne-periodice, de tip haotic. Dacă se reprezintă toate valorile pe care le poate lua un astfel de sistem funcție de valoarea parametrului de control se obține așa numitul ”arbore cu bifurcații” care reprezintă de fapt o reprezentare a spațiului fazelor pentru sistemul parametrizat. Ce este remarcabil în aceste reprezentări ale evoluțiilor haotice este faptul că sub-regiunile acestor suprafețe, cu bifurcațiile pe care le ia sistemul, sunt similare unele cu altele și cu întreaga structură. Auto-similaritatea, care se repetă la cele mai mici rezoluții, este caracteristică și figurilor geometrice numite „fractali” [5].

Există o serie de determinări, calitative și cantitative, ce ne permit să analizăm și să concluzionăm dacă fenomenul studiat are o natură haotică deterministă sau nu. Printre aceste metode pentru reprezentările temporale ale evoluției sistemului cele mai utilizate sunt hărțile Poincaré, analiza spectrală, dimensiunea fractală și analiza spațiului fazelor [6]. De exemplu analiza Fourier permite distingerea dintre un semnal cvasi-periodic, cu

număr finit de picuri de frecvență – de obicei cu armonicele corespunzătoare, și unul haotic, caracterizat de un spectru continuu, de bandă largă, cu maxime line. Dar nu permite distingerea clară dintre un semnal haotic, care de obicei are o structură, și un zgomot, care are doar un simplu spectru caracteristic de forma unei legi putere $S \propto 1/f^\alpha$, mai mult, și sistemele la limita haosului au spectre similare. O modificare rapidă în spectrul de putere la varierea unui parametru de control indică însă mai degrabă o bifurcație într-un sistem deterministic decât un zgomot. Evoluțiile periodice sau cuvasipericodice pot fi caracterizate printr-o serie de linii discrete în spectrul Fourier. Benzile lărgite pot indica haosul, dar și emisia termică are un spectru similar. Funcțiile de corelație ar trebui să aibă o scădere exponențială, dar la fel se întâmplă și cu emisia termică. O măsură importantă a structurii „spațiale” a traiectoriei în spațiul fazelor este dimensiunea sa fractală. Dimensiunea este definită ca numărul de grade de libertate disponibile într-un spațiu pe direcții ortogonale. Dimensiunea topologică a unui spațiu reprezintă dimensiunea locală maximă, definită ca plus unu din dimensiunea minimă a unui obiect având capacitatea de a separa acel spațiu în două părți distincte. Obiectele supuse unei transformări punct cu punct (homeomorphism) trebuie să-și conserve în general dimensiunea. O caracteristică a traiectoriilor haotice, similară sistemelor fractale, este aceea că ele își depășesc dimensiunea generatoare.

Unul dintre cele mai cunoscute sisteme neliniare este reprezentat de așa numitul model Lorentz, având la origine un model al dinamicii unei pături de aer. În dinamica fluidelor, manifestarea turbulențelor reprezintă o problemă clasică de comportare haotică. Această comportare se modelează plecând de la instabilitățile de convecție, instabilități Benard. Când un fluid este încălzit de dedesubt, mișcarea fluidului este descrisă de ecuațiile Navier-Stokes. Descompunând Fourier câmpul de temperatură și de viteze, coeficienții Fourier rămân dependenți de timp, și reținând doar trei termeni din seria infinită obține trei ecuații diferențiale cuplate cu trei variabile:

$$\frac{dX(t)}{dt} = \sigma(Y(t) - X(t)); \quad \frac{dY(t)}{dt} = rX(t) - Y(t) - X(t)Z(t); \quad \frac{dZ(t)}{dt} = -bZ(t) + X(t)Y(t)$$

(a1)

reprezentând cel mai faimos atractor, atractorul Lorenz. Trebuie punctată influența constantelor în evoluția sistemului. Dacă $r < 1$ fluidul este în repaus, și numai dacă $\sigma > b + 1$

și $r > \sigma(\sigma + b + 3) / (\sigma - 1 - b)$ instabilitatea conduce la o mișcare haotică, neregulată, altfel evoluția sistemului este lină. Vom vedea că o simplificare din teoria semi-clasică a dinamicii laserului auto-pulsant conduce de asemenea la un set de ecuații echivalent cu ecuațiile (a1). Numit de Lorentz ”curgere determinista neperiodica”, soluțiile ecuațiilor care modelează acest fenomen variază drastic de fiecare data când valorile inițiale sunt foarte puțin modificate, așa numitul ”efect de fluture” (care spune ca o bătaie a aripii unui fluture, undeva în lume, poate stârni o furtună, mai târziu, în alta parte a lumii). Același model a fost confirmat și pentru ”spike”-urile neregulate ce apar în emisia laser [7].

Evoluțiile temporale ale soluțiile ecuațiilor de tip Lorenz sunt foarte sensibile la condițiile inițiale. Dacă modificăm puțin condițiile inițiale cele două traiectorii se depărtează din ce în ce mai mult, exponențial, în timp. Fie un set de ecuații neliniare ale vectorului de stare al sistemului $dq/dt = N(q)$, introducând o mică variație $q' = q + u$, cu u mic și liniarizând ecuația cu privire la u obținem $du/dt = L(q(t))u$, unde L este o matrice cu coeficienți dependenți de timp. Modulul $|u|$ măsoară distanța în spațiul fazelor dintre cele două traiectorii (q' și q). Ne așteptăm ca în cazul prezenței haosului u să se comporte $u = \exp(\lambda t)v$, unde λ este pozitiv și v este relativ lent variabilă. Putem defini pentru orice proces parametrul $\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln(|u|/t)$, numit exponent Lyapunov. Dacă q este n -dimensional, există maximum n coeficienți și dacă numai unul dintre exponenți este pozitiv criteriul de existență a haosului este satisfăcut [8].

Sistemele haotice pot fi determinate să evolueze pe orbite ordonate, principiul de baza este observația ca orice attractor haotic al unui sistem neliniar dinamic conține un set infinit dens de orbite nestabile periodice. Există o serie de metode principiale de control al haosului, prin aplicarea unor perturbații tari unor parametri ai sistemului [9], sau perturbând starea sistemului astfel încât să-l ducem spre punctul lui fix. [10], știind harta și secțiunea Poincaré a sistemului folosind însă un mare efort de calcul în timp real. Alte metode sunt bazate pe aplicarea unui mic feedback (pe un singur parametru al sistemului) proporțional cu o valoare de referință [11], sau prin aplicarea unei perturbații parametrice ce stabilizează orbita sistemului [12].

Haosul in Sistemele Laser

Un tip special de comportare a sistemelor laser este cel haotic. În optica clasică lumina provenită de la sursele termice, atomi excitați termic, era denumită haotică. În acest caz nu există radiație laser, atomii sunt slab pompați și după fiecare excitare atomii individuali emit spontan un tren de undă, complet necorelat, rezultând un câmp optic aleatoriu [13]. Tratarea emisiei spontane se face doar în tratarea optică cuantică, haosul aleator produs în acest caz prin emisia de lumină este produs de fluctuații de origine cuantică. În cazul emisiei laser, plecând de la ecuații deterministe ce nu conțin fluctuații, în anumite condiții, emisia laser se comportă aleator. Diferența este că în acest caz mulți atomi cooperează coerent pentru a produce o emisie haotică.

Originile haosului sunt foarte diferite pentru fiecare sistem neliniar, însă ele prezintă instrumente comune pentru a analiza dinamica haotică. Toate sistemele haotice au două trăsături în comun, acestea sunt neliniare și implică anumite reguli iterative. Unele aspecte deosebit de semnificative și fundamentale ale teoriei haosului sunt relevate de analiza unor ecuații matematice "simple" cum ar fi așa numita "hartă logistică" [14]. În funcție de valoarea inițială a parametrului de control, sistemul poate evolua spre orbite stabile, constante sau periodice, sau spre orbite ne-periodice, de tip haotic.

Comportarea haotică apare și în cazul sistemelor laser. În optica clasică lumina provenită de la sursele termice (atomi excitați termic) era denumită haotică. În acest caz nu există radiație laser (atomii sunt pompați slab) și după fiecare excitare atomii individuali emit un tren de undă spontan, complet necorelat, rezultând un câmp optic aleator. Tratarea emisiei spontane se face doar în tratarea optică cuantică, "haosul aleator" produs în acest caz prin emisia de lumină este produs de fluctuații de origine cuantică. În cazul emisiei laser, plecând de la ecuații deterministice ce nu conțin fluctuații, în anumite condiții, emisia laser pare că se comportă aleator – are o comportare haotică deterministă. Diferența este că în acest caz există mulți atomi ce cooperează coerent pentru a produce o astfel de emisie haotică.

Aplicații ale teoriei haosului se utilizează într-o serie întreagă de realizări tehnologice. Folosirea unui semnal de feedback întârziat la controlul oscilatorilor semiconductori stabili și reglabili [2] sau utilizarea purtătoarei haotice în transmisia de date cu sisteme haotice de dimensiuni coborâte [15-16] ori de dimensiune ridicată [17]

sunt câteva dintre acestea.

În fizica laserilor controlul experimental al comportării haotice a emisiei luminoase prezintă un interes din ce în ce mai mare. Emisia haotică a laserilor a fost studiată teoretic și experimental pentru multe dintre sistemele laser, de exemplu pentru laserul He-Ne cu emisie în IR [18], sau laserul cu CO₂ [19], He-Xe [20], Nd-YAG [21], dioda laser [22] sau mai recent în sisteme de tip inel fibra optică dopată cu erbiu [23],

Diferite metode au fost folosite pentru a obliga sistemele laser să evolueze pe orbite periodice. Metoda micilor modulații într-un laser cu CO₂ în cazul modularii pierderilor sau tehnica feedback-ului proporțional ocazional aplicată în cazul rezonatorului unei diode laser sau a unui laser cu Nd:YAG dublat în frecvență permite, de exemplu, controlul emisiei haotice. Un mic semnal periodic aplicat unui parametru accesibil al sistemului haotic ca o forță externă poate suprima efectiv comportarea haotică a sistemului, ca de exemplu într-un laser Nd:YAG pompat cu o diodă sau pentru o diodă laser, sau poate să introducă o reducere a manifestării haotice a fazei procesului ca în cazul emisiei luminoase a descărcării unui tub cu plasmă.

Dintre posibilele aplicații ale conexiunii dintre teoria haosului și a fizicii laserilor, poate cea mai actuală și de perspectivă, este aceea a transmisiei informației pe purtătoare haotică. Există câteva metode principale consacrate care permit transmiterea informației folosind proprietățile dinamicii haotice. O schemă de mascare folosind ideea sincronizării haosului [24], unde un sistem "master" este folosit pentru a sincroniza două (sau unul [25]) subsisteme "slave". Mesajul este adăugat semnalului haotic generat de unul din subsistemele "slave" și transmis la receptorul "slave". Atunci când cele două subsisteme sunt sincronizate partea haotică a semnalului mixat poate fi eliminată și mesajul poate fi reprodus. O altă metodă este aceea a controlului haosului prin aplicarea unor mici perturbații unui sistem haotic dublu spiralat (similar cu cel al atractivului Lorentz) care produce o comutare pe o orbită prestabilită a sistemului. Dinamica sistemului haotic permite alocarea unor secvențe particulare în conformitate cu orbitele periodice nestabile închise în atractiv. Mesajul este codificat de secvențele ce satisfac anumite condiții impuse de dinamica neliniară.